GRANIČNE VREDNOSTI FUNKCIJA

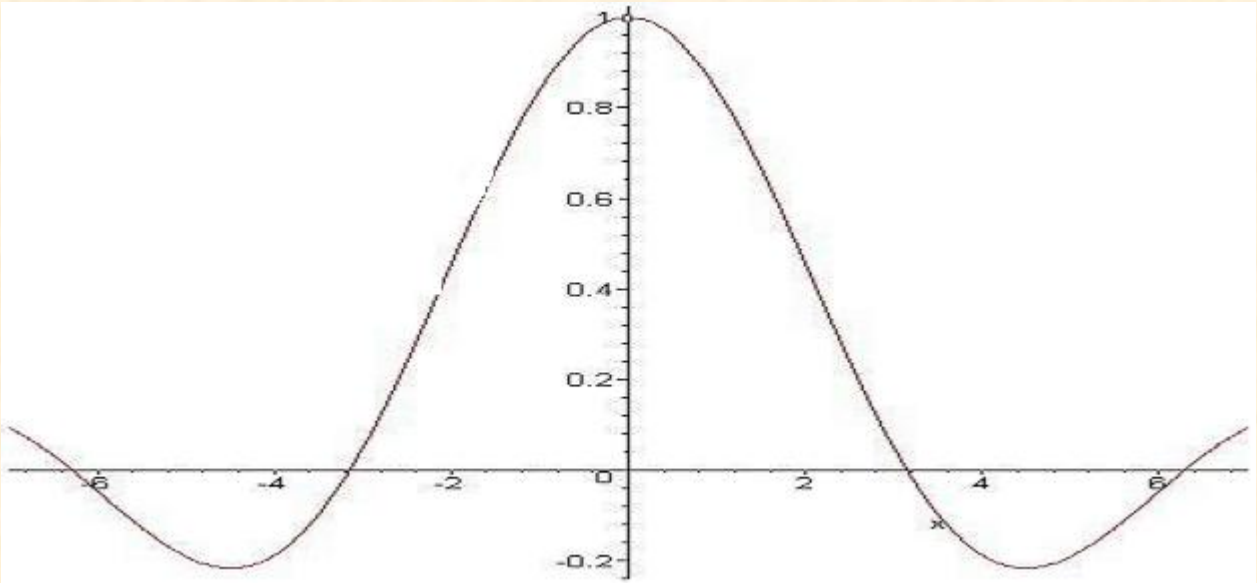
- Granične vrednosti funkcija:Primeri;
- Formalna definicija granične vrednosti;
- Jednostrane granične vrednosti;
- Beskonačne granične vrednosti

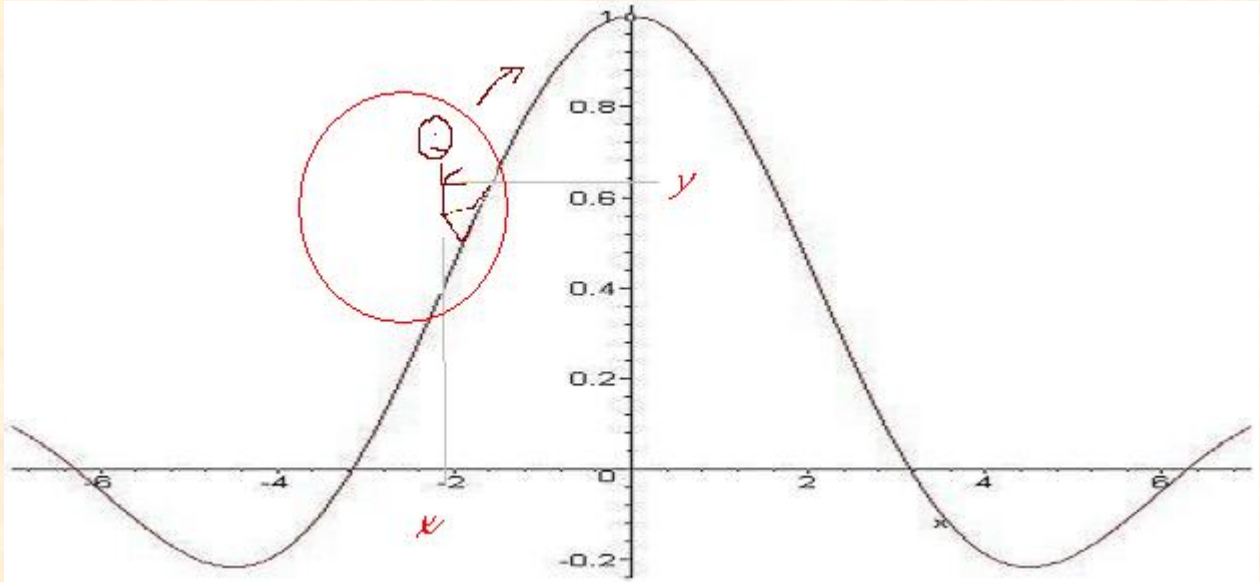
Granične vrednosti funkcija: Primeri

Funkcija $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ definisana je za svako $x \in \mathbf{R}$ osim za $x = 0$.

Granične vrednosti funkcija: Primeri

Funkcija $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ definisana je za svako $x \in \mathbf{R}$ osim za $x = 0$.





Ako se tačka kreće duž grafika tako da se njena x-koordinata približava nuli, onda bi se y-koordinata približavala jedinici.

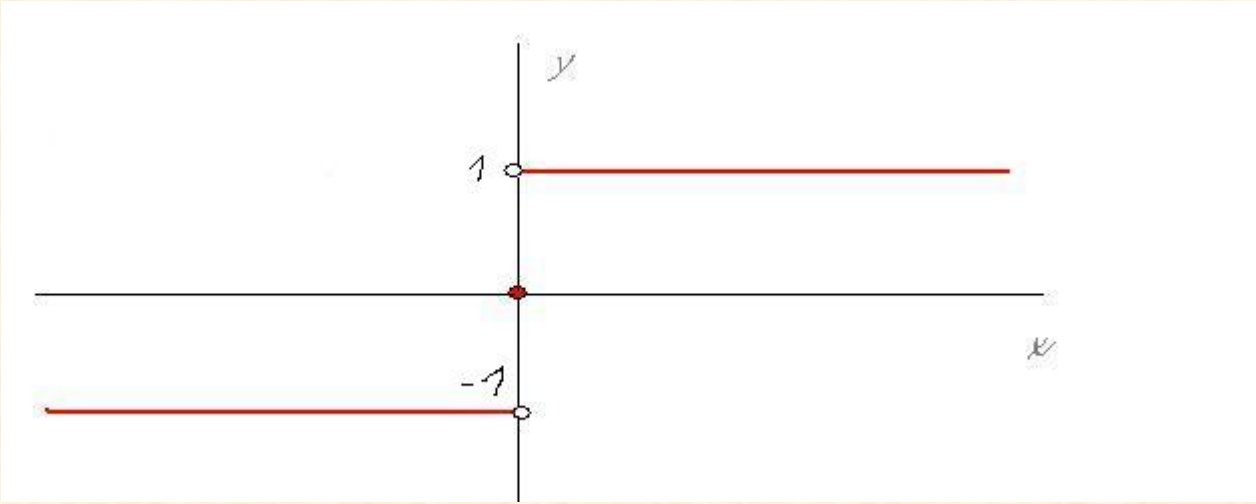
Zamislimo da se tačka kreće duž grafika funkcije $y = f(x)$, u pravcu nule. Veličina kojoj se y-koordinata približava kada se x-koordinata približava nuli, zove se granična vrednost ili limes funkcije f kad $x \to 0$, u oznaci $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Funkcija $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ (znak broja x), definisana je za svako $x \in \mathbf{R}$ pomoću formule

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

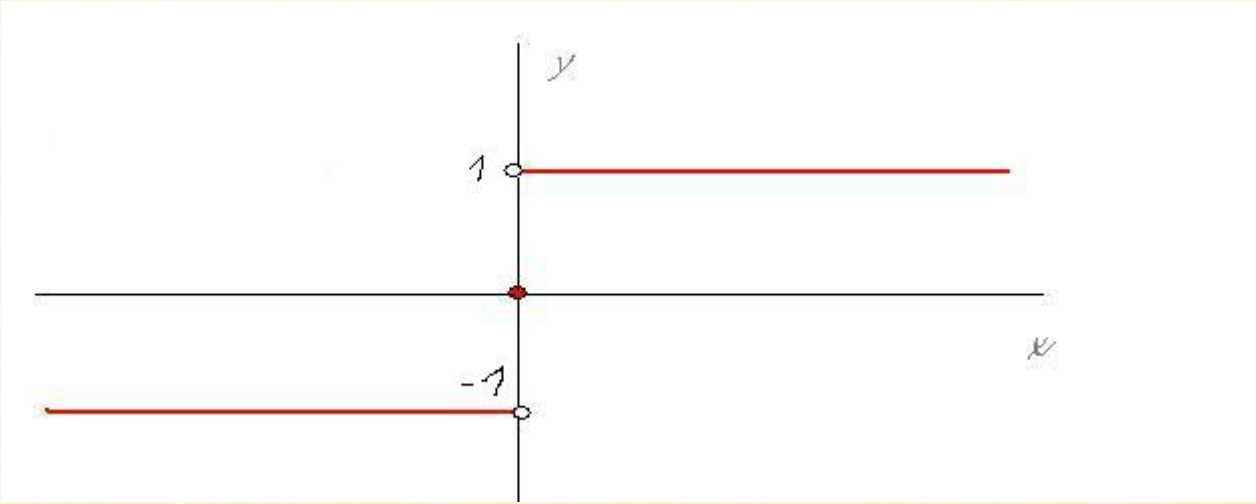
Funkcija $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ (znak broja x), definisana je za svako $x \in \mathbf{R}$ pomoću formule

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



Funkcija $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ (znak broja x), definisana je za svako $x \in \mathbf{R}$ pomoću formule

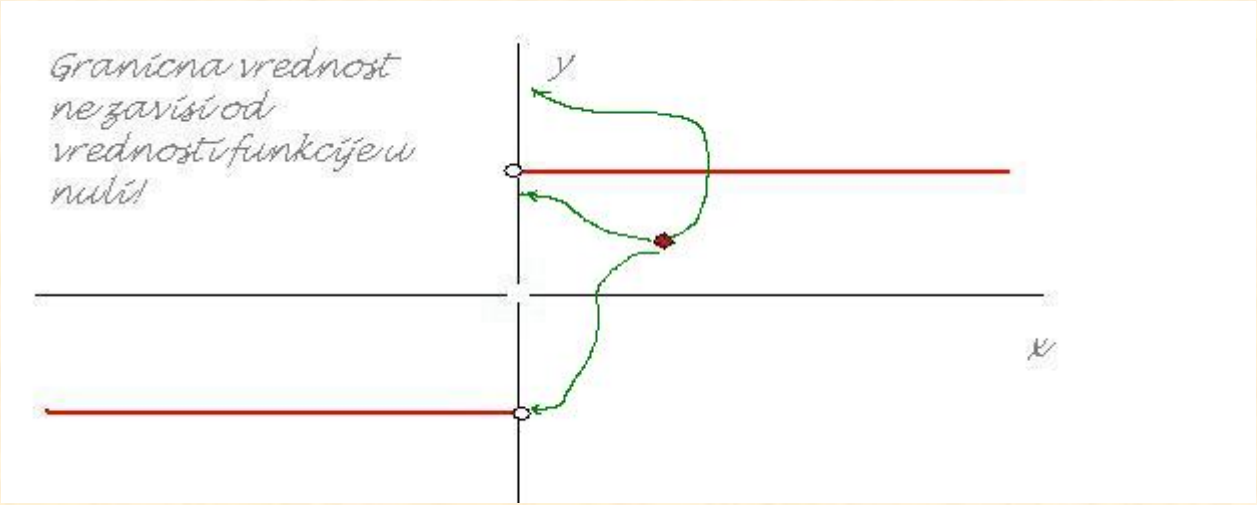
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



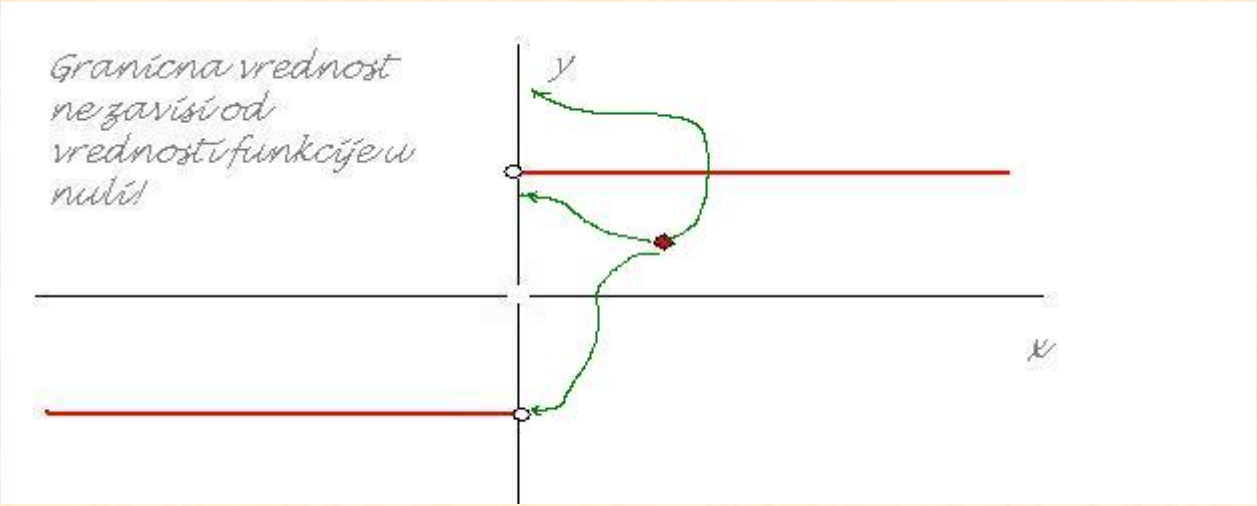
Ovde vidimo da vrednost funkcije teži ka jedinici ako x teži nuli zdesna i ka -1 ako x teži nuli sleva.

Ako izmenimo definiciju ove funkcije u nuli, limesi ostaju isti:

Ako izmenimo definiciju ove funkcije u nuli, limesi ostaju isti:



Ako izmenimo definiciju ove funkcije u nuli, limesi ostaju isti:



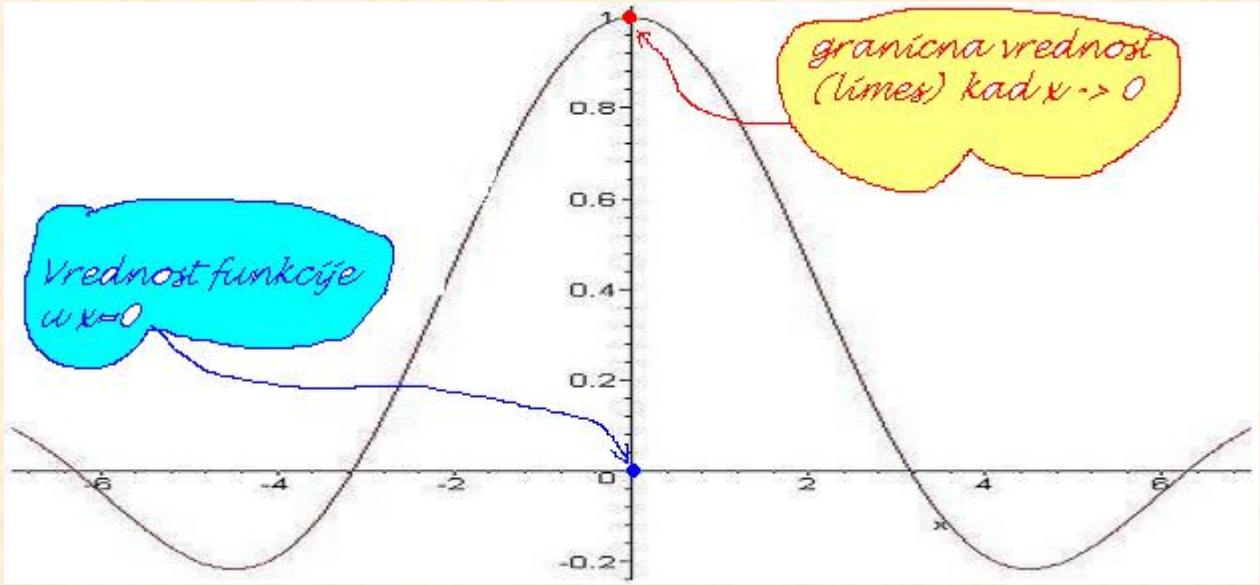
Granična vrednost ne zavisi od vrednosti funkcije u posmatranoj tački!

Neka je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

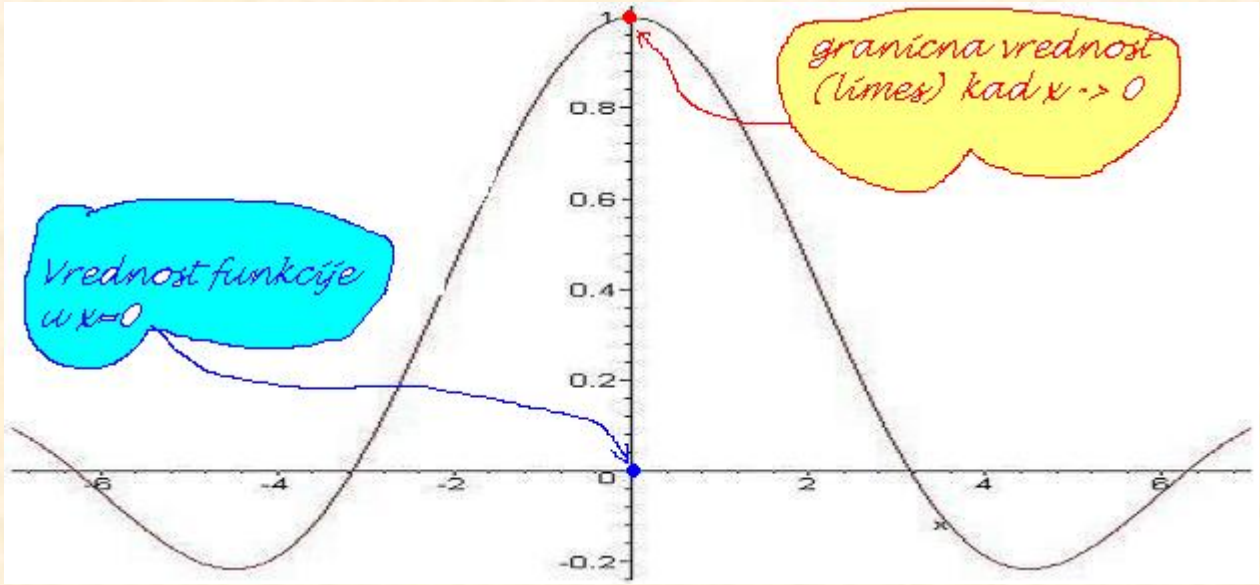
Neka je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Neka je

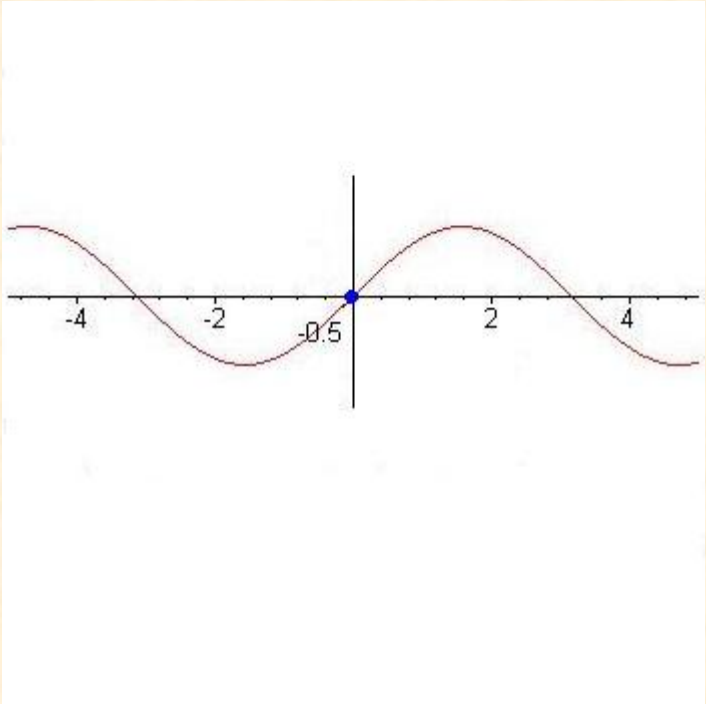
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



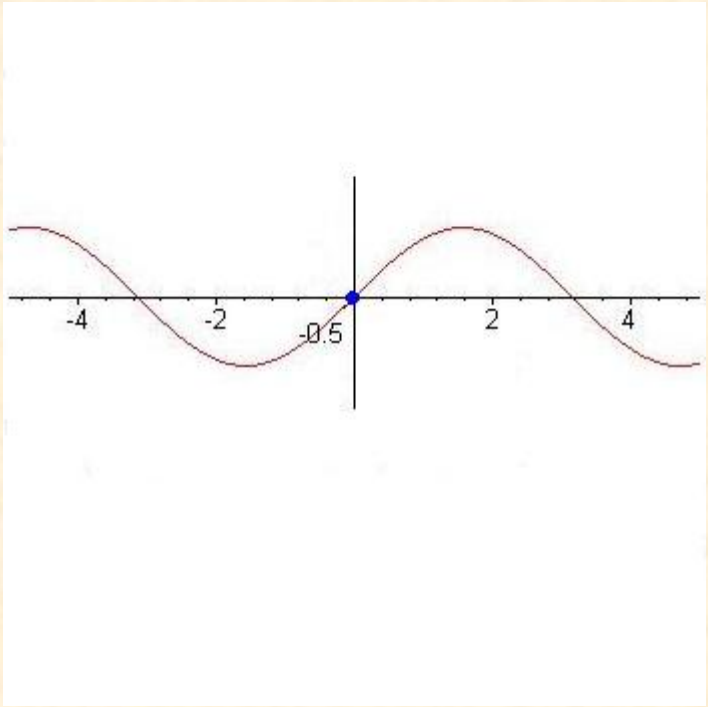
Vrednost ove funkcije u nuli je različita od granične vrednosti kad $x \to 0$.

Neka je $f(x) = \sin x$.

Neka je $f(x) = \sin x$.

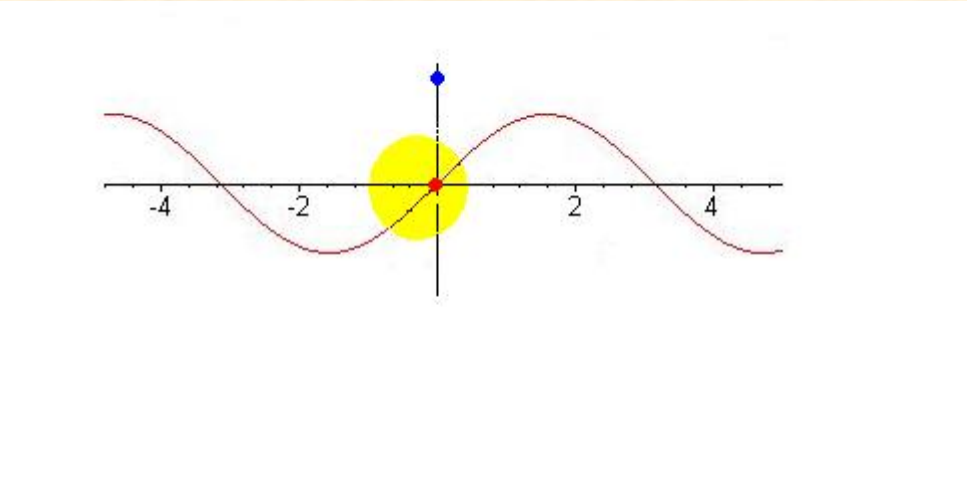


Neka je $f(x) = \sin x$.

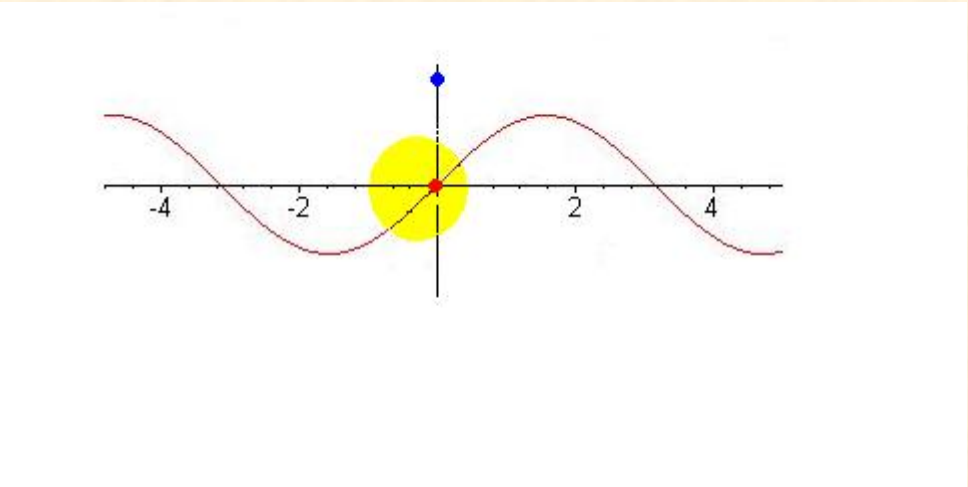


Vrednost ove funkcije u nuli je ista kao i njena granična vrednost kad $x \to 0$.

Ako izmenimo samo vrednost u nuli, granična vrednost ostaje ista.



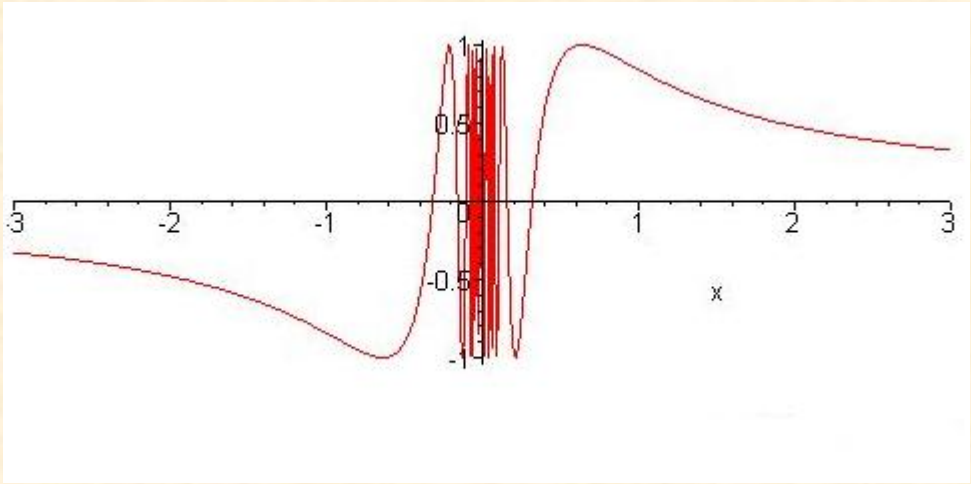
Ako izmenimo samo vrednost u nuli, granična vrednost ostaje ista.



Granična vrednost kad $x \to 0$ zavisi od vrednosti funkcije u okolini tačke $x = 0$

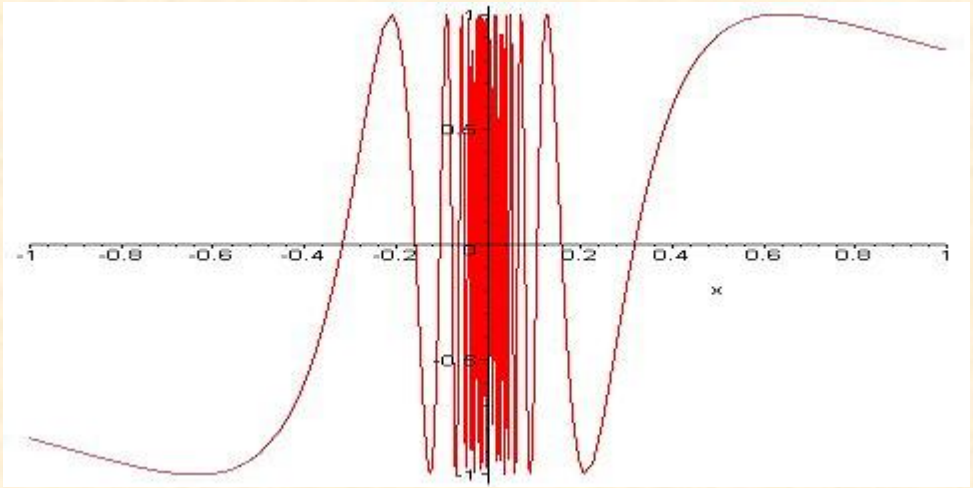
Funkcija $x \mapsto \sin(1/x)$ definisana je u svakoj tački $x \neq 0$.

Funkcija $x \mapsto \sin(1/x)$ definisana je u svakoj tački $x \neq 0$.



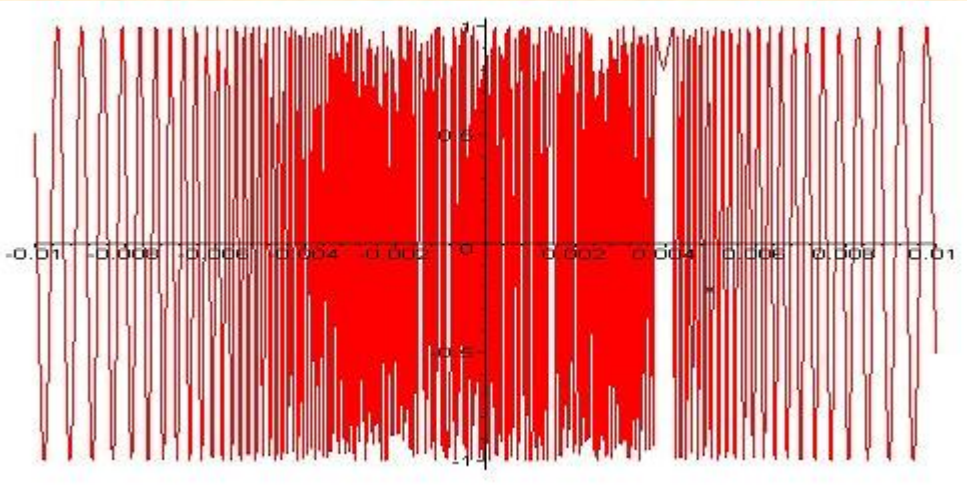
Šta se dešava sa y-koordinatom tačke kad $x \to 0$?

Zumirajmo . . .



y-koordinata uzima sve vrednosti između -1 i 1 u bilo kojoj okolini nule po x-osi.

Zumirajmo još. . .



I odgovor je isti: U ovom slučaju ne postoji limes!

Formalna definicija granične vrednosti

Definicija 1 Neka je D dati skup i neka je $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Kaže se da je a **tačka nagomilavanja** skupa D ako se u svakoj okolini tačke a nalazi bar jedna tačka $x \in D$, $x \neq a$.

Formalna definicija granične vrednosti

Definicija 1 Neka je D dati skup i neka je $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Kaže se da je a **tačka nagomilavanja** skupa D ako se u svakoj okolini tačke a nalazi bar jedna tačka $x \in D$, $x \neq a$.

Opisno, a je tačka nagomilavanja skupa D ako možemo da joj se približimo na proizvoljno malo rastojanje ostajući pri tome u skupu D.

Formalna definicija granične vrednosti

Definicija 1 Neka je D dati skup i neka je $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Kaže se da je a **tačka nagomilavanja** skupa D ako se u svakoj okolini tačke a nalazi bar jedna tačka $x \in D$, $x \neq a$.

Opisno, a je tačka nagomilavanja skupa D ako možemo da joj se približimo na proizvoljno malo rastojanje ostajući pri tome u skupu D.

Primeri:

- Skup $S = (0, 1)$ ima za tačke nagomilavanja sve svoje tačke, osim njih, 0 i 1

Formalna definicija granične vrednosti

Definicija 1 Neka je D dati skup i neka je $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Kaže se da je a **tačka nagomilavanja** skupa D ako se u svakoj okolini tačke a nalazi bar jedna tačka $x \in D$, $x \neq a$.

Opisno, a je tačka nagomilavanja skupa D ako možemo da joj se približimo na proizvoljno malo rastojanje ostajući pri tome u skupu D.

Primeri:

- Skup $S = (0, 1)$ ima za tačke nagomilavanja sve svoje tačke, osim njih, 0 i 1
- Skup $[0, 1]$ sadrži sve svoje tačke nagomilavanja;

Formalna definicija granične vrednosti

Definicija 1 Neka je D dati skup i neka je $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Kaže se da je a **tačka nagomilavanja** skupa D ako se u svakoj okolini tačke a nalazi bar jedna tačka $x \in D$, $x \neq a$.

Opisno, a je tačka nagomilavanja skupa D ako možemo da joj se približimo na proizvoljno malo rastojanje ostajući pri tome u skupu D.

Primeri:

- Skup $S = (0, 1)$ ima za tačke nagomilavanja sve svoje tačke, osim njih, 0 i 1
- Skup $[0, 1]$ sadrži sve svoje tačke nagomilavanja;
- Skup koji se sastoji od konačno mnogo realnih brojeva nema tačaka nagomilavanja;

Formalna definicija granične vrednosti

Definicija 1 Neka je D dati skup i neka je $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Kaže se da je a **tačka nagomilavanja** skupa D ako se u svakoj okolini tačke a nalazi bar jedna tačka $x \in D$, $x \neq a$.

Opisno, a je tačka nagomilavanja skupa D ako možemo da joj se približimo na proizvoljno malo rastojanje ostajući pri tome u skupu D.

Primeri:

- Skup $S = (0, 1)$ ima za tačke nagomilavanja sve svoje tačke, osim njih, 0 i 1
- Skup $[0, 1]$ sadrži sve svoje tačke nagomilavanja;
- Skup koji se sastoji od konačno mnogo realnih brojeva nema tačaka nagomilavanja;
- Skup prirodnih brojeva nema konačne tačke nagomilavanja; jedna tačka nagomilavanja ovog skupa je $+\infty$;

Formalna definicija granične vrednosti

Definicija 1 Neka je D dati skup i neka je $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Kaže se da je a **tačka nagomilavanja** skupa D ako se u svakoj okolini tačke a nalazi bar jedna tačka $x \in D$, $x \neq a$.

Opisno, a je tačka nagomilavanja skupa D ako možemo da joj se približimo na proizvoljno malo rastojanje ostajući pri tome u skupu D.

Primeri:

- Skup $S = (0, 1)$ ima za tačke nagomilavanja sve svoje tačke, osim njih, 0 i 1
- Skup $[0, 1]$ sadrži sve svoje tačke nagomilavanja;
- Skup koji se sastoji od konačno mnogo realnih brojeva nema tačaka nagomilavanja;
- Skup prirodnih brojeva nema konačne tačke nagomilavanja; jedna tačka nagomilavanja ovog skupa je $+\infty$;

Ako je funkcija f definisana na domenu D, onda možemo da zamislimo da se neka tačka kreće po grafiku te funkcije tako da se njena x-koordinata neograničeno približava broju a, jedino ako je a tačka nagomilavanja domena D.

Ako je funkcija f definisana na domenu D, onda možemo da zamislimo da se neka tačka kreće po grafiku te funkcije tako da se njena x-koordinata neograničeno približava broju a, jedino ako je a tačka nagomilavanja domena D.

Zato, na primer, nema smisla govoriti o limesu niza x_n kad $n \to 1/2$, ili o limesu funkcije $x \mapsto \sqrt{x}$ kad $x \to -2$.

Definicija 2 Neka je funkcija f definisana na skupu $D \subset \mathbf{R}$ i neka je a tačka nagomilavanja skupa D.

- Kažemo da funkcija f ima graničnu vrednost A kad x teži ka a, u oznaci $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

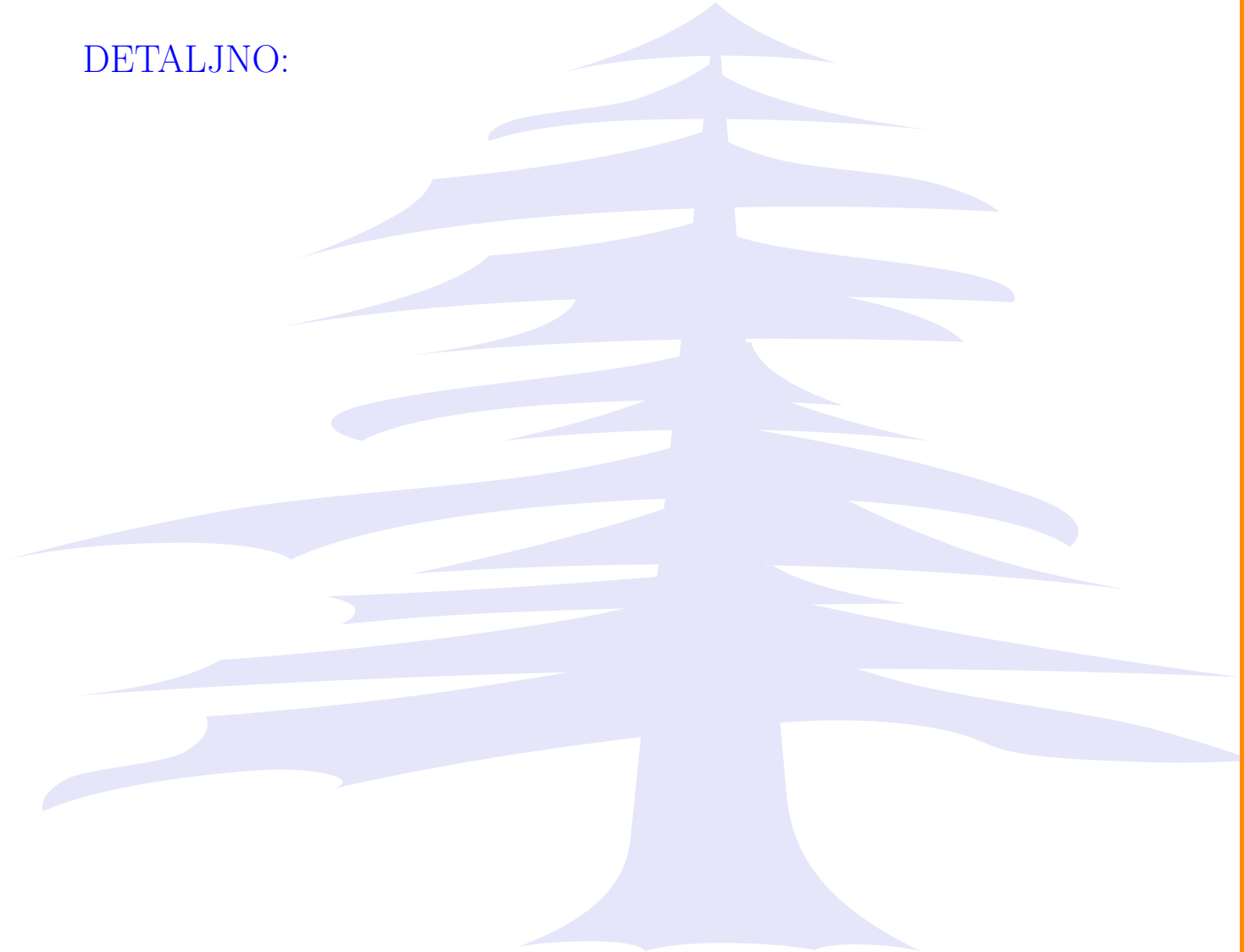
Definicija 2 Neka je funkcija f definisana na skupu $D \subset \mathbf{R}$ i neka je a tačka nagomilavanja skupa D.

- Kažemo da funkcija f ima graničnu vrednost A kad x teži ka a, u oznaci $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Ova definicija u literaturi se zove i ε-δ **definicija**.

DETALJNO:



DETALJNO:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

DETALJNO:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

- $0 < |x - a| < \delta$ znači da $x \in (a - \delta, a + \delta)$, pri čemu je $x \neq a$.

DETALJNO:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

- $0 < |x - a| < \delta$ znači da $x \in (a - \delta, a + \delta)$, pri čemu je $x \neq a$.
- $|f(x) - A| < \varepsilon$ znači da $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

DETALJNO:

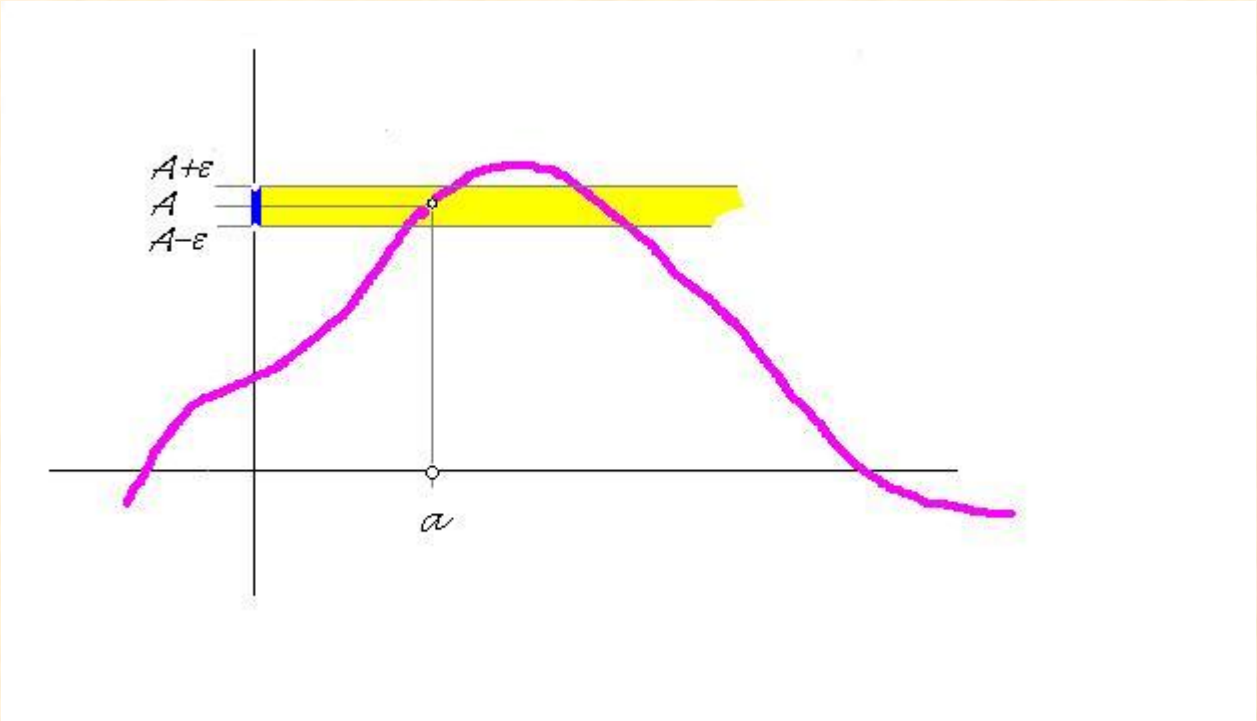
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

- $0 < |x - a| < \delta$ znači da $x \in (a - \delta, a + \delta)$, pri čemu je $x \neq a$.
- $|f(x) - A| < \varepsilon$ znači da $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$
- Uzmemo proizvoljno pozitivno ε.

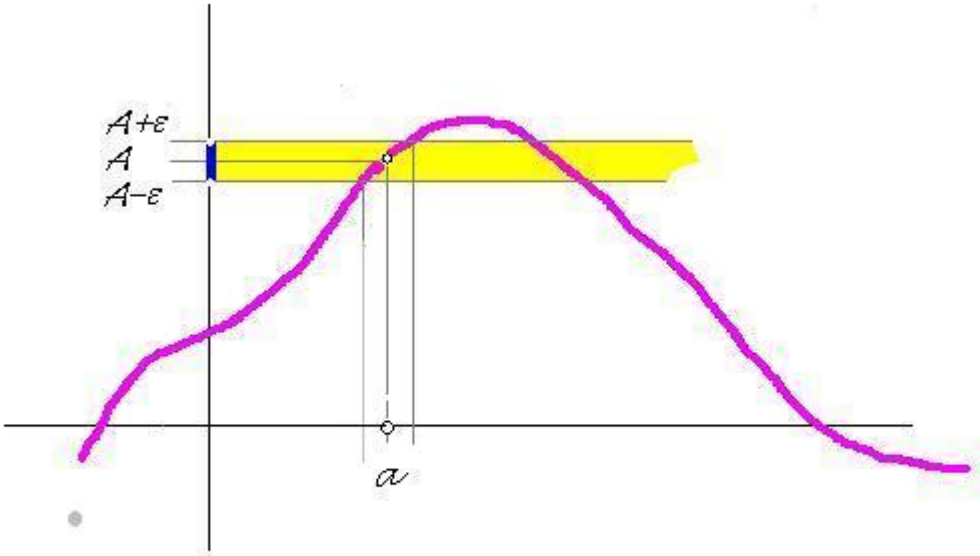
DETALJNO:

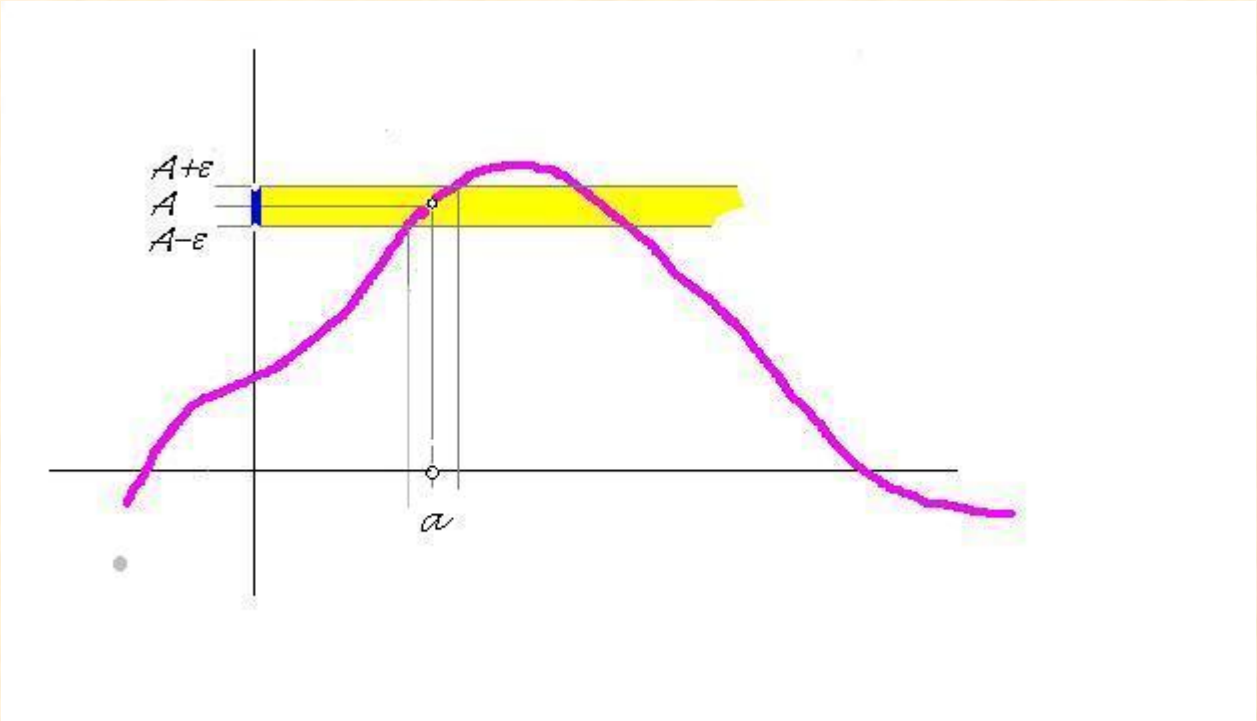
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

- $0 < |x - a| < \delta$ znači da $x \in (a - \delta, a + \delta)$, pri čemu je $x \neq a$. **(δ-okolina tačke a osim same te tačke)**
- $|f(x) - A| < \varepsilon$ znači da $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ **-ε-okolina tačke A**
- Uzmemo proizvoljno pozitivno ε.
- Za to ε tražimo δ tako da se δ-okolina tačke a (osim eventualno same tačke a) preslikava u ε-okolinu tačke A



Tražimo interval oko tačke a koji se preslikava u ε-okolinu tačke A.

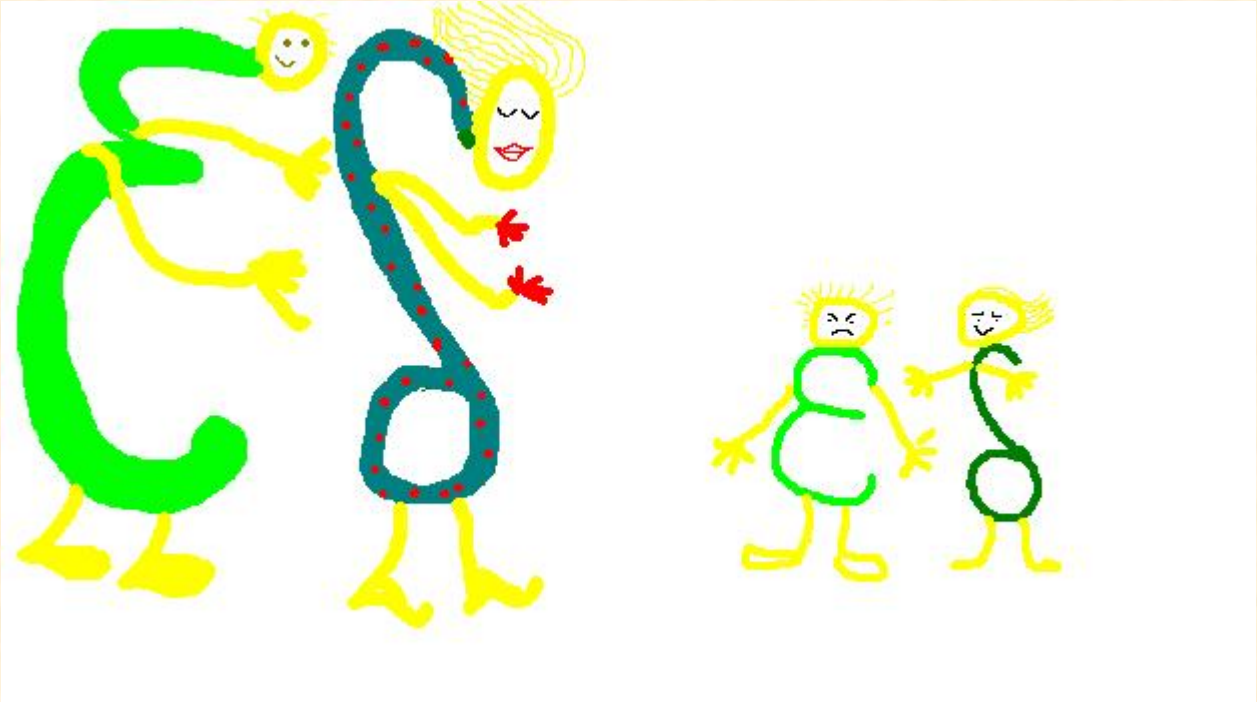

A+ε
A
A−ε
a



Sada u nađenom intervalu uzimamo jedan interval koji je centriran u a: $(a-\delta, a+\delta)$. Poludužina tog intervala jeste δ koje smo i tražili.

U ovom procesu, veliko ε dopušta veliko δ, dok malo ε zahteva malo δ

U ovom procesu, veliko ε dopušta veliko δ, dok malo ε zahteva malo δ



Dovoljno je da se definicija proveri za MALO ε. !!!!

Još dva ekvivalentna oblika definicije granične vrednosti:

Još dva ekvivalentna oblika definicije granične vrednosti:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $f(D \cap (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}) \subset (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Još dva ekvivalentna oblika definicije granične vrednosti:

- $\lim_{x \to a} f(x) = A$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $f(D \cap (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}) \subset (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.
- $\lim_{x \to a} f(x) = A$ ako i samo ako za svaku okolinu V tačke A postoji okolina U tačke a tako da je $f(D \cap U \setminus \{a\}) \subset V$.

Primer:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \ ?$$

Primer:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \ ?$$

Striktan dokaz:

Primer:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \ ?$$

Striktan dokaz:

- $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|, \qquad |x| \in (0, \pi/2)$

Primer:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \ ?$$

Striktan dokaz:

- $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|, \qquad |x| \in (0, \pi/2)$
- $1 < |x|/|\sin x| < 1/|\cos x|, \qquad |x| \in (0, \pi/2).$

Primer:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \ ?$$

Striktan dokaz:

- $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|, \qquad |x| \in (0, \pi/2)$
- $1 < |x|/|\sin x| < 1/|\cos x|, \qquad |x| \in (0, \pi/2).$
- $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1, \quad$ odnosno $\quad 0 < 1 - \dfrac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$

Primer:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \ ?$$

Striktan dokaz:

- $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|, \qquad |x| \in (0, \pi/2)$
- $1 < |x|/|\sin x| < 1/|\cos x|, \qquad |x| \in (0, \pi/2).$
- $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1, \quad$ odnosno $\quad 0 < 1 - \dfrac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$
- Za $\varepsilon \in (0, 1)$ važi:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon \quad \text{ako} \quad 1 - \cos x < \varepsilon \iff \cos x > 1 - \varepsilon.$$

Primer:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \ ?$$

Striktan dokaz:

- $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|, \qquad |x| \in (0, \pi/2)$
- $1 < |x|/|\sin x| < 1/|\cos x|, \qquad |x| \in (0, \pi/2).$
- $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1, \quad$ odnosno $\quad 0 < 1 - \dfrac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$
- Za $\varepsilon \in (0, 1)$ važi:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon \quad \text{ako} \quad 1 - \cos x < \varepsilon \iff \cos x > 1 - \varepsilon.$$

- $\cos x > 1 - \varepsilon \iff |x| < \arccos(1 - \varepsilon)$ **Zašto??**

Primer:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \ ?$$

Striktan dokaz:

- $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|, \qquad |x| \in (0, \pi/2)$
- $1 < |x|/|\sin x| < 1/|\cos x|, \qquad |x| \in (0, \pi/2).$
- $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1, \quad$ odnosno $\quad 0 < 1 - \dfrac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$
- Za $\varepsilon \in (0, 1)$ važi:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon \quad \text{ako} \quad 1 - \cos x < \varepsilon \iff \cos x > 1 - \varepsilon.$$

- $\cos x > 1 - \varepsilon \iff |x| < \arccos(1 - \varepsilon)$ **Zašto??**
- $\delta = \arccos(1 - \varepsilon)$!

U knjizi je greška: umesto **ako** stoji $\iff$. Pokažite na primeru da $\iff$ ne može da stoji.

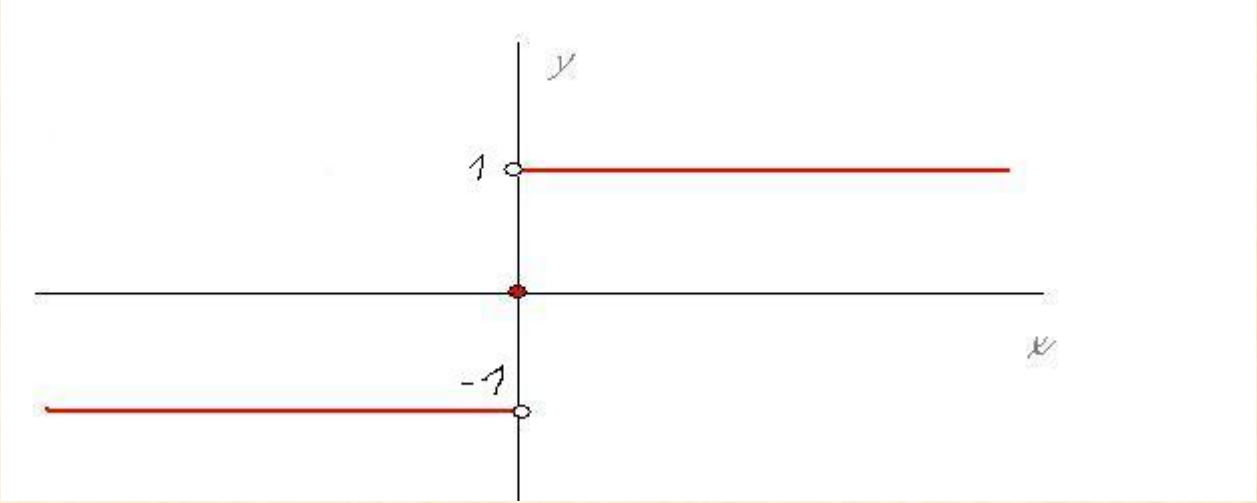
Drugi primer: funkcija $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ nema graničnu vrednost kad $x \to 0$.

Drugi primer: funkcija $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ nema graničnu vrednost kad $x \to 0$.

Zaista, u svakoj δ-okolini nule postoji beskonačno mnogo brojeva oblika $x_n = 2/n\pi$, u kojima funkcija uzima vrednosti $g(x_n) = \sin \frac{n\pi}{2} \in \{-1, 0, 1\}$. Ako bi postojao $\lim_{x \to 0} g(x) = A$, onda bi se u svakoj ε-okolini broja A nalazili brojevi $-1, 0$ i 1, što je apsurd.

Jednostrani limesi (levi i desni)

Potsetimo se funkcije $x \mapsto \operatorname{sgn} x$:



Definicija 3 Neka je funkcija f definisana na skupu $D \subset \mathbf{R}$ i neka je a tačka nagomilavanja skupa D takva da se u svakoj njenoj okolini nalazi neko $x \in D$ sa leve strane tačke a (tj. $x < a$).

Definicija 3 Neka je funkcija f definisana na skupu $D \subset \mathbf{R}$ i neka je a tačka nagomilavanja skupa D takva da se u svakoj njenoj okolini nalazi neko $x \in D$ sa leve strane tačke a (tj. $x < a$).

Ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad a - \delta < x < a \implies |f(x) - A| < \varepsilon,$$

tada kažemo da je realan broj A **leva granična vrednost** funkcije f kad $x \to a$ i pišemo $\lim_{x \to a_-} f(x) = A$.

Definicija 3 Neka je funkcija f definisana na skupu $D \subset \mathbf{R}$ i neka je a tačka nagomilavanja skupa D takva da se u svakoj njenoj okolini nalazi neko $x \in D$ sa leve strane tačke a (tj. $x < a$).

Ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad a - \delta < x < a \implies |f(x) - A| < \varepsilon,$$

tada kažemo da je realan broj A **leva granična vrednost** funkcije f kad $x \to a$ i pišemo $\lim_{x \to a_-} f(x) = A$.

Analogno, ako je a tačka nagomilavanja skupa D takva da se u svakoj njenoj okolini nalazi neko $x \in A$, $x > a$ i ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad a < x < a + \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon,$$

tada kažemo da je A **desna granična vrednost** funkcije f kad $x \to a$, ili $\lim_{x \to a_+} f(x) = A$.

Definicija 3 Neka je funkcija f definisana na skupu $D \subset \mathbf{R}$ i neka je a tačka nagomilavanja skupa D takva da se u svakoj njenoj okolini nalazi neko $x \in D$ sa leve strane tačke a (tj. $x < a$).

Ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad a - \delta < x < a \implies |f(x) - A| < \varepsilon,$$

tada kažemo da je realan broj A **leva granična vrednost** funkcije f kad $x \to a$ i pišemo $\lim_{x \to a_-} f(x) = A$.

Analogno, ako je a tačka nagomilavanja skupa D takva da se u svakoj njenoj okolini nalazi neko $x \in A$, $x > a$ i ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad a < x < a + \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon,$$

tada kažemo da je A **desna granična vrednost** funkcije f kad $x \to a$, ili $\lim_{x \to a_+} f(x) = A$.

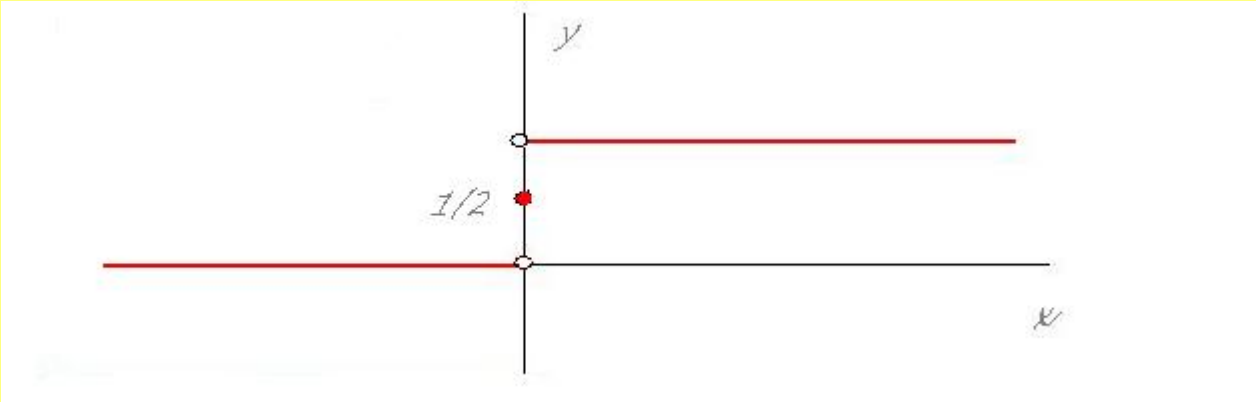
Oznake:

$$f(a_-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to a_-} f(x), \quad f(a_+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to a_+} f(x) \ .$$

Obostrana granična vrednost (u smislu definicije **2**) postoji ako i samo ako postoje leva i desna granična vrednost i ako su te granične vrednosti međusobno jednake.

Primer: HEAVISIDEova funkcija definisana je sa

$$H(t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



$$H(0_-) = \lim_{x \to 0_-} H(x) = 0, \qquad H(0_+) = \lim_{x \to 0_-} H(x) = 1. \quad \square$$

U Elektrotehnici se ova funkcija definiše sa $H(0) = 1$.

Definicija 4 • Kažemo da je granična vrednost funkcije f kad $x \to a$ jednaka $+\infty$, u oznaci $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ako je a tačka nagomilavanja domena D funkcije f i ako važi

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > K.$$

Beskonačne granične vrednosti

Definicija 4 • Kažemo da je granična vrednost funkcije f kad $x \to a$ jednaka $+\infty$, u oznaci $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ako je a tačka nagomilavanja domena D funkcije f i ako važi

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > K.$$

• Kažemo da je granična vrednost funkcije f kad $x \to +\infty$ jednaka $A \in \mathbf{R}$, u oznaci $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ ako domen D funkcije f nije ograničen odozgo i ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D) \quad x > B \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Beskonačne granične vrednosti

Definicija 4 • Kažemo da je granična vrednost funkcije f kad $x \to a$ jednaka $+\infty$, u oznaci $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ako je a tačka nagomilavanja domena D funkcije f i ako važi

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > K.$$

• Kažemo da je granična vrednost funkcije f kad $x \to +\infty$ jednaka $A \in \mathbf{R}$, u oznaci $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ ako domen D funkcije f nije ograničen odozgo i ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D) \quad x > B \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Na analogan način definišu se leva i desna beskonačna granična vrednost, granična vrednost u $-\infty$ itd.

Primer: $\lim_{x \to 1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty.$

Primer: $\lim_{x \to 1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty.$

Dokaz?

Primer: $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{|x-1|} = +\infty$.

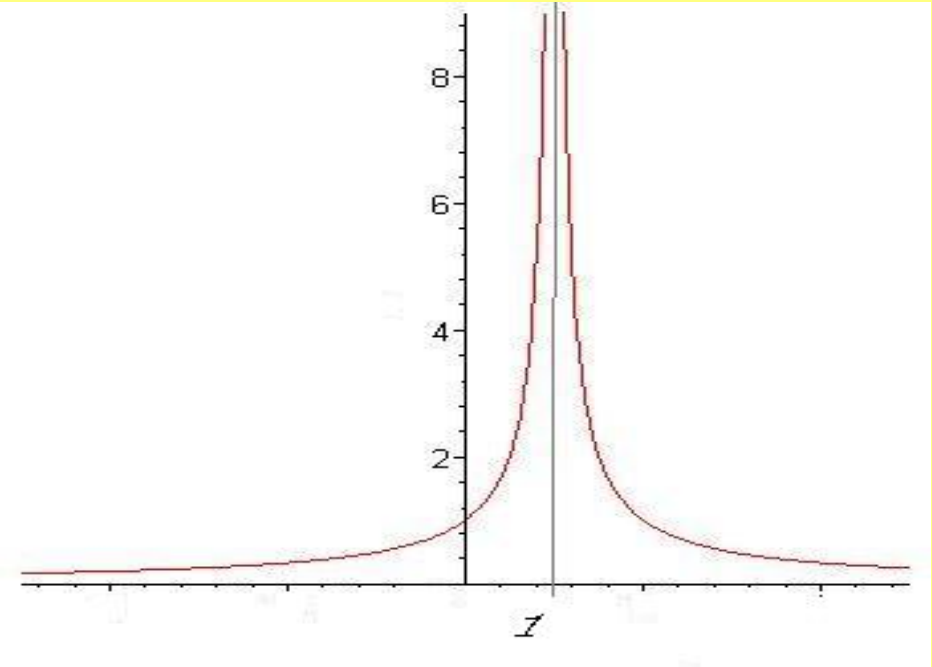
Dokaz?

Ovde možemo da iskoristimo i simboličko pravilo $1/0_+ = +\infty$, koje smo naučili kod nizova.

Primer: $\lim_{x\to 1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty$.

Dokaz?

Ovde možemo da iskoristimo i simboličko pravilo $1/0_+ = +\infty$, koje smo naučili kod nizova.



Prava $x = 1$ zove se **vertikalna asimptota** za datu funkciju.

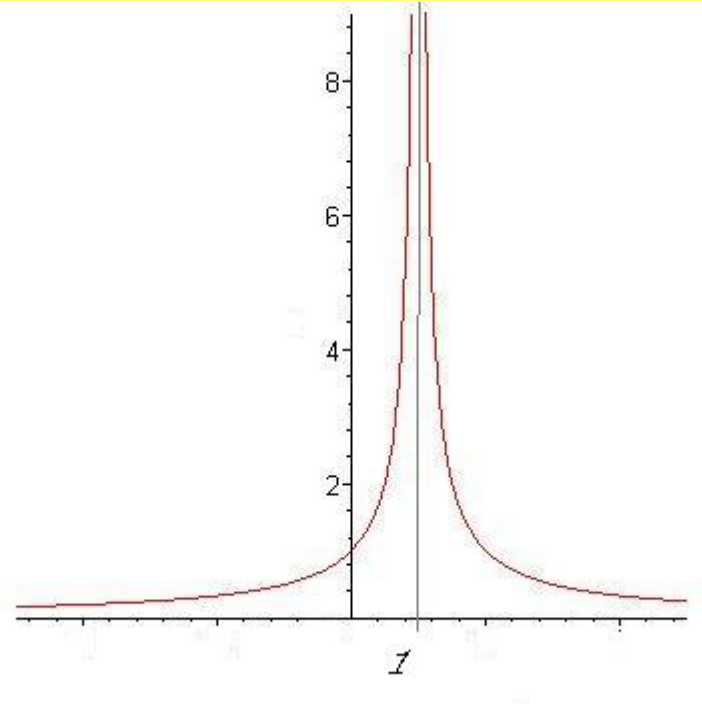
Za istu funkciju, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{|x-1|} = 0$ (pravilo: $1/+\infty = 0$)

Za istu funkciju, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{|x-1|} = 0$ (pravilo: $1/+\infty = 0$)

Prava $y = 0$ zove se **horizontalna asimptota** za datu funkciju.

Za istu funkciju, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{|x-1|} = 0$ (pravilo: $1/+\infty = 0$)

Prava $y = 0$ zove se **horizontalna asimptota** za datu funkciju.



Neka je $f(x) = e^{1/x}$. Ova funkcija je definisana za $x \neq 0$.

Neka je $f(x) = e^{1/x}$. Ova funkcija je definisana za $x \neq 0$.

$$\lim_{x \to 0_-} f(x) = 0 \qquad \text{jer je } e^{-\infty} = 0;$$

Neka je $f(x) = e^{1/x}$. Ova funkcija je definisana za $x \neq 0$.

$$\lim_{x \to 0_-} f(x) = 0 \qquad \text{jer je } e^{-\infty} = 0;$$

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = +\infty \qquad \text{jer je } e^{+\infty} = +\infty;$$

Neka je $f(x) = e^{1/x}$. Ova funkcija je definisana za $x \neq 0$.

$$\lim_{x \to 0_-} f(x) = 0 \qquad \text{jer je } e^{-\infty} = 0;$$

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = +\infty \qquad \text{jer je } e^{+\infty} = +\infty;$$

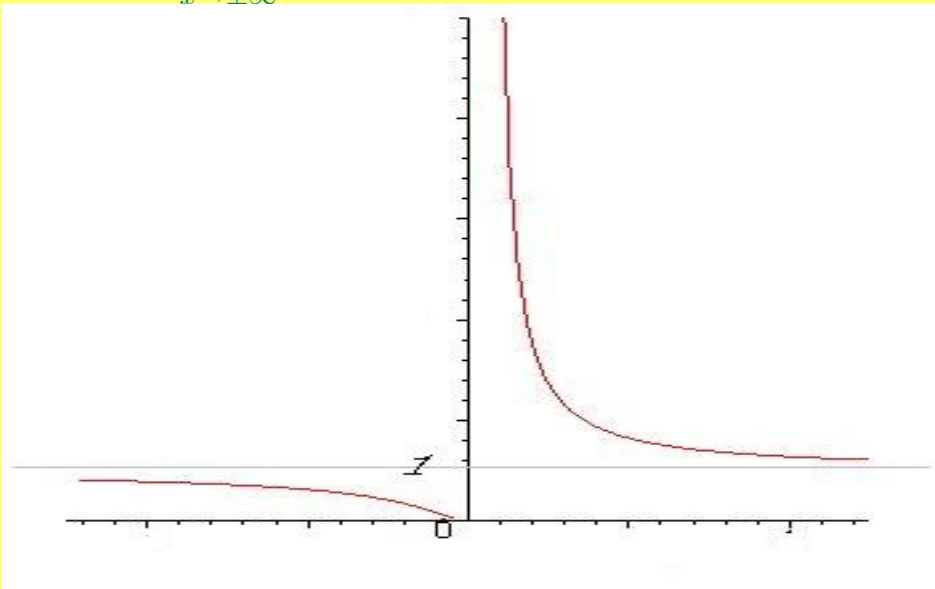
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \qquad \text{jer je } e^{0} = 1$$

Neka je $f(x) = e^{1/x}$. Ova funkcija je definisana za $x \neq 0$.

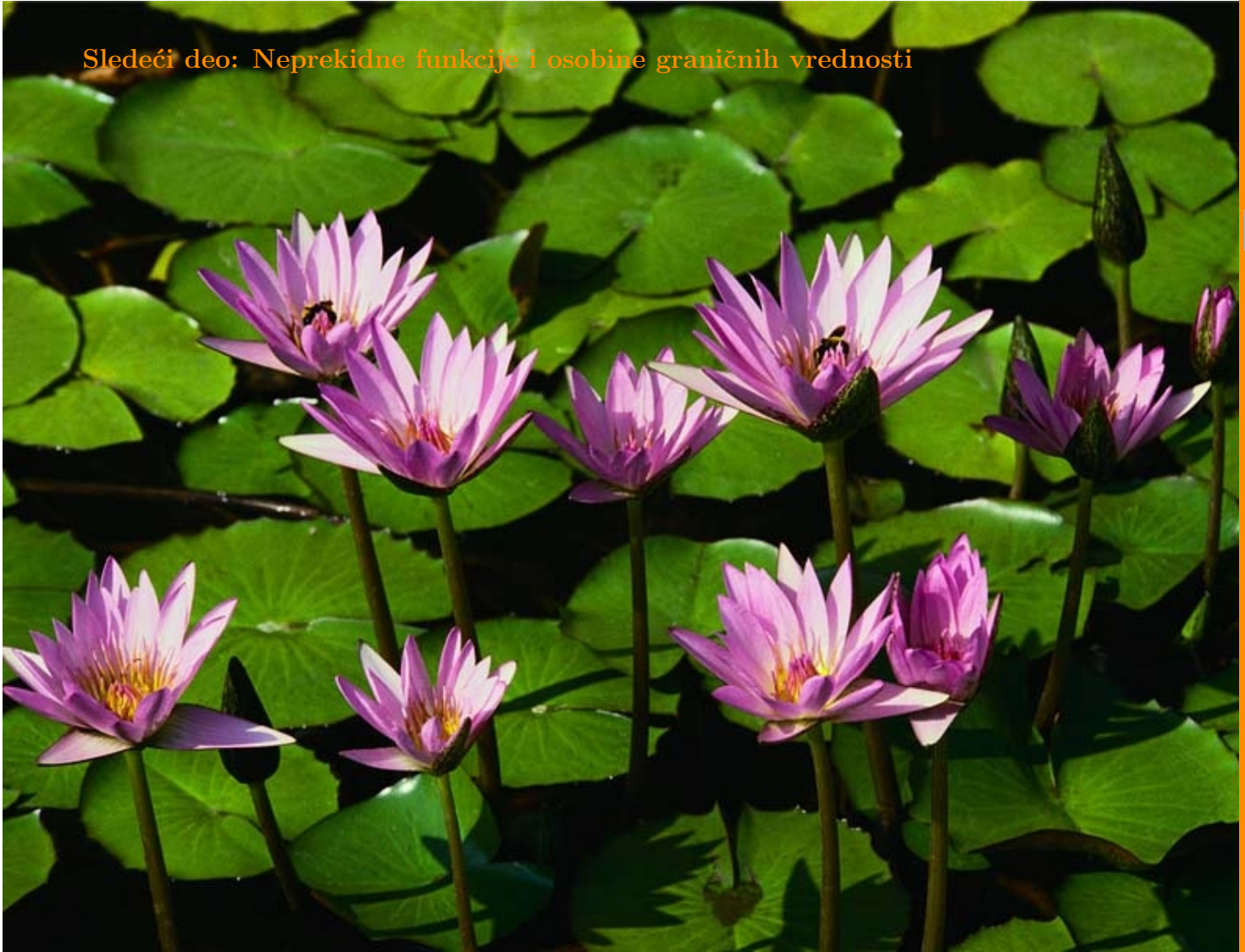
$$\lim_{x \to 0_-} f(x) = 0 \qquad \text{jer je } e^{-\infty} = 0;$$

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = +\infty \qquad \text{jer je } e^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \qquad \text{jer je } e^{0} = 1$$



U ovom delu smo naučili:

- Pojam granične vrednosti funkcije;
- Pojam tačke nagomilavanja;
- Formalnu $(\varepsilon - \delta)$ definiciju granične vrednosti;
- Pojam leve i desne granične vrednosti;
- Pojam beskonačnih graničnih vrednosti;
- Važne primere:
  - $\frac{\sin x}{x}$ kad $x \to 0$;
  - $\sin(1/x)$ kad $x \to 0$;
  - Funkcije sgn x i $H(x)$;
  - $e^{1/x}$ kad $x \to 0_-$, $x \to 0_+$ i $x \to \pm\infty$;

Sledeći deo: Neprekidne funkcije i osobine graničnih vrednosti